TITEL: DYNAMICS OF THE TETRON MODEL

ALLGEMEINE PRINZIPIEN:

- es macht Sinn, gleich die fundamentale Theorie zu konstruieren, da die effektive Theorie schon existiert (nämlich das Standardmodell)

ein 7-dim SUSY Modell aus einem einzigen Oktonion und einem Vektorfeld, in Näherung als Spin-Spin WW des Oktonions

- es geht um inner-diskret und nicht um äußeren diskreten Raum -

diskreter äußerer Raum ist wahrscheinlich, aber denkbar ist auch ein Kontinuumslimit wie bei Ising-Polyakov. In dem Fall gibt es string-fermionisches Verhalten

Braucht man, wenn man ein inneres Gitter hat, noch eine WW, die maximal wird, wenn die 4 inneren Spins anti-alligned sind? Antwort: Für die PV mit ungeraden Permutationen auf jeden Fall

MODELLE, DIE IN FRAGE KOMMEN:

- ein flukturierendes Permutationsgitter, in dem die Unschärferelation aus den Gitterfluktuationen kommen.
  - Raumkrümmung wie? Gibt es Elementaranregungen wie beim Quarkmodell, deren Tensorprodukt die Quarks und Leptonen sind?

- Sigma-Modell mit diskreten inneren Werten (aber wo kommen Felder her?) oder kontinuierlichen Werten und einem Spatprodukt als WW.
  - Fermionen zu bekommen in Spinmodellen und sigma-Modellen ist ein Problem (außer Skyrmions), außerdem ist das Spatprodukt nicht nur S4, sondern SO3 invariant (belieb. Drehung des Volumens im Raum)

- ein diskretes Ising-artiges Modell mit S4 (diskrete Werte 1,2,3,4 – keine Spins, sondern Eigenschaften) statt Z2
  - Hamilton gleich 1 wenn 4 Nachbarpunkte verschiedenen Spin tragen (plus oder minus 1 macht Paritätsverletzung), sonst 0.
  - die wahre Symmetrie verhält sich zur S4 wie die räumliche SO3 zur Ising-Z2. Die wahre Symmetrie müsste dann eine 24-dimensionale Darstellung haben wie die räumliche eine Spin1/2
  - Gibt es hier 24 innere (Neel) Zustände, d.h. die nicht durch räumliche Drehungen ineinander übergehen? Wenn nicht, wähle bipartit und erzeuge 24 Zustände durch Drehungen des einen Gitters gegens andere.
  - kann ein solches Modell bzw seine Loops zu einer Feldtheorie äquivalent sein? Studiere dazu Polyakov oder *sehrgut-3d-ising-string9205100v2.pdf*

- wie man von Ising zu Heisenberg übergehen kann, so auch kontinuierliche Spins in einem inneren 3d-Raum und Spatprodukt als WW
  - Wegen der kontinuierliche inneren Symmetrie ist hier das Spatprodukt der einzigeTräger der S4. Ob das ausreicht? Spatprodukt ist als Volumen ja kontinuierlich SO3 invariant

- ein bipartites fcc Gitter wo sich die innere Symmetrie durch Relativdrehungen der beiden Untergitter ergibt.
  - Die innere Symmetrie ist dann automatisch diskret. Wie sehen die Spinvektoren aus???
  - Ein bisschen ist das wie eine diskrete innere S4, aber eine globale, keine lokale

- S4-symmetrisches 4-Fermi-Modell mit Bindungszuständen aus 3 Fermionen: eps(abcd)fbar(a)Xf(b)fbar(c)Xf(d) +c.c.
  - zb A1=(f1 f2bar) f3 + (f2 f3bar) f4 + …. S4 symmetrische Kombinnation
  - c.c. wg bar und X=einer der Fierzausdrücke
  - Leider nichtbosonisch nichtlokal, wenn es über 4 Gitterpunkten a,b,c,d liegt

<u>R7 ALS EIGENES KAPITEL</u>: **old dream of theoretical physics** to make use of the third dividion algebra O in addition to Q and C:

- ein R7-Gitter, das zu einem inneren R4-Gitter wird (entweder S4xS4xS4 von SU2xSU2xSU2 oder BESSER: S4xS4 von SU4→SU2xSU2)
  - too many obstacles: fermions und bosons in einer Darstellung außer man nimmt G1+G2+2H auch für die inneren Zustände
  - über dem ursprünglichen R7-Gitter ein Octonion X als fundamentales Feld X=8=4+4bar=(2,2)+(2,2)=(G1,G1)+(G1,G1)
  - R7→R3xR4 gibt zwei Tetraeder wie R3→R2xR1 zwei Linien S12 und S34 erlaubt
  - die Kompaktifizierung läuft nicht über Punktfasern, sondern jeweils innerer über äußerem Tetraeder Zuordnung a(i) 4 Punkte über 4 Punkten so dass Spinmodell X(i,a(i))*Vij*X(j,b(j)) oder 4FermiWW

Ursache der S4-Symmetrie ist eigentlich die Kompaktifizierung eines R7-Gitters. (Ohne Gitter hätte man inneren Raum 5-Sphäre, ohne Kompaktifizierung ein inneres R4-Gitter). Durch die Kompaktifizierung entstehen/liegt über einem R3-Tetraeder als Basis“punkt“ entweder

- ein weiterer Tetraeder (äquivalent(?) einem bipartiten Gitter mit einer effektiven T-U-Spintheorie) oder
- ein inneres Tetraedergitter. In dem Fall keine echte Kompaktifizierung. Ein Oktonion sitzt auf jedem R7-Gitterpunkt und eine 7-dimensionale Zustandssumme ist zu bilden,um Erwartungswerte zu berechnen

EIN KAPITEL ÜBER PARITÄTSVERLETZUNG:

Grunddogma: schwache Isospintrafos ←→ ungerade Perms (Spiegelung) im Innenraum

Parität ←→ ungerade Perms (Spiegelung) im Außenraum

Die WW sollte bei ungerader Permutation in Innen+Außen ihr Vorzeichen wechseln ←→ also bei Permutation der Gitterpunkte a, b, c, d, auf denen die Felder oder Spinvektoren sitzen.

Weil schwacher Isospintransformation im tetron modell ungeraden Permutationen entspricht, entsteht PV durch eine WW mit Spatprodukt, oder wenn man den Tetraeder durch die 4 Einheitsachsen im 4dim Raum definiert aus H=eps(ijkl)*ei*ej*ek*el. Beide Ausdrücke haben Vorzeichenwechsel bei ungeraden Permutationen! N.B.: da das Spatprodukt als ein Volumen kontinuierlich SO3-invariant ist, ist der 4er epsilon-Tensor vielleicht zu bevorzugen!?

Spatprodukt oder eps Term sorgt dafür, dass die S4-Zustände negativ gewichtet sind, wenn man eine ungerade Perm des Basistetraeders vornimmt (was aber äquivalent einer Permutation der 4 inneren Vektoren ist, die einen Tetraeder im inneren Gitter definieren. Die ungerade Permutation ist zugleich eine Reflexion=Paritytrafo im inneren wie im äußeren Gitter. Zudem entspricht sie einer Kombination von geradem und ungeradem Fermion (g*u=u), also enem schwachen Boson, das deren Transformation vermittelt) Sicher wäre es schön, inneres und äußeres Gitter zu vereinigen (mit nur 1 Gitterkonstante) man hätte dann eine 6+1 dimensionale Physik. bei eps*S*S*S*S eine 7+1 dim Physik

PROGRAMM:

- Gruppentheorie. Welche Darstellungen hat SO7? – eine Vektor und eine Spindarstellung gibt es auf jeden Fall) aber auch right from the start um ein Spinmodell Svec=obar*tauvec*o mit einem fundamentalen Oktonionfeld. Nota bene:.
- ein grundlegendes Modell in R7+1, das aufs Gitter eingeschränkt wird. Es könnte sich um eine einfache SUSY-WW handeln (aber bei diskret ist UV-Finiteness kein Thema)
- Test

The 2 copies of Hurwitz quats (1+i+j+k)/2 und (l+il+jl+kl)/2 als Symm-ops of 2 Tetrahedron

PHILOSOPHIE DES SPATPRODUKTANSATZES:

Das Volumen ist gegeben durch den Betrag des Spatproduktes:

| (s1-s0) [(s2-s0) x (s3-s0)] |

Dieser Betrag is S4-symmetrisch, während es ohne Betrag eine A2-Darstellung von S4 ist. (habe ich auf Papier bewiesen!!! Nb: der Betrag |f12-f21| ist eine A1-Darstellung, denn unter 1←→2 ist er invariant).

Tatsächlich ist bekannt, dass das Spatprodukt in einem 3dim Raum ein Pseudoskalar ist, also bei Spiegelungen mit Vorzeichen reagiert. Spiegelungen sind beim Tetraeder die ungeraden Permutationen, also schwacher Isospin!!!, und dies könnte die Ursache der Paritätsverletzung sein (Achtung, wir reden beim Tetraeder über Spiegelungen in einem inneren Raum), nämlich dass durch das Vorzeichen der Kopplung die VBL gegenüber den VBR-Bosonen bevorzugt werden. (Bei Fermionen müssen fL und fR natürlich gleiche Massen haben). Die beobachtete Paritätsverletzung betrifft Spiegelungen im realen Raum, und diese beiden Arten von Spiegelungen sind bei dem Oktionion Spatprodukt korreliert! 7+1 Dims, um Händigkeit korrekt zu beschreiben. In 3+1: (2,1)+(1,2). Aber relativistisch ist Tetraeder nicht gut. Parität und ihre Verletzung kann man auch im Ruhsystem definieren.

Es geht auch kontinuierliches Spinmodell, da das Spatprodukt Tetraeder-konfiguration bevorzugt. (antiferromagnetisch) Kontinuierlich, was den Wertebreich der Spinvektoren angeht, aber Raumgitterpunkte braucht man trotzdem.

Felder über einem R7 Gitter: haben nach Kompaktifizierung automatisch S5(=S4xS4?) Symmetrie, aber PV ist ein Problem (könnte mit A2-von-S4-Gitter-Lagrangian gelöst werden).

Felder über kontin R7 mit Spatww: *Problem: Das Spatprodukt=eps(abc)fi(a)fi(b)fi(c) ist inner-SO3-invariant, da es das Volumen eines Tetraeders ist, den man beliebig drehen kann. Als inner-SO3 invariant erwartet man nicht nur inner-S4-Zustände, sondern inner-SO3 Zustände. Allgemein scheint es so zu sein, dass man ein Spektrum einer diskreten Gruppe nur bekommt, wenn man den (inneren) Raum diskret macht*.

Vielleicht soll man nicht so auf R7 schielen, sondern ein S4-Gitter

Bemerkungen zum Thema PV:

Erlaubt sind **ZUSTÄNDE** uR, dR und so weiter.

Verboten (oder zumindest anders als uL ←→ dL) sind **Übergänge** uR ←→ dR (also bei den räumlich rechtshändigen die S4-ungeraden)

der Charakter solcher Übergänge ist immer linkshändig

Diese Übergänge sind Teil des **VB**-Multipletts und nicht der Fermionen.

Gesamtheit der 48 L- und R-Fermionen durch Einschluss der äußeren Parität in die innere S4.

vielleicht soll man Polyakov doch ernst nehmen, wenn wir diskrete Modelle ernst nehmen: conti limit of ising in 3 dims gives a ermion, genauer:The 1-dimensional Ising model has no phase change and was in 1925already solved by Ernst Ising himself. he 2-dimensional square latticeIsing model is much harder and, in the case of zero magnetic field, wasgiven a complete analytic escription much later, by Onsager (1944). Infact, the two-dimensional model has a phase change, and is one of thesimplest statistical models with this property. The two-dimensionalmodel is usually solved by a transfer-matrix method, although thereexist different approaches, more related to quantum field theory. Inthree dimensions, the Ising model was shown to have a epresentation interms of NON-INTERACTING FERMIONIC LATTICE STRINGS by AlexanderPolyakov.

While the Ising model is a simplified microscopic description offerromagnetism, it is still extremely important because of theuniversality of the continuum limit. Universality means that thefluctuations near the phase transition are described by a continuumfield with a free energy or Lagrangian which is a function of the fieldvalues. Just as there are many ways to discretize a differentialequation, all of which give the same answer when the lattice spacing issmall, there are many different discrete models that have the exact samecritical behavior, because they have the same continuum limit.

Local bosonic models are important since they are really local. We note that a fermionic model are in general non local since the fermion operators at different sites do not commute, even when the sites are well separated. Due to their intrinsic locality, local bosonic models are natural candidates for the fundamental theory of nature. In the following we will give a detailed definition of local bosonic models.
To define a physical system, we need to specify (A) a total Hilbert space, (B) a definition of a set of local physical operators, and (C) a Hamiltonian. With this understanding, a local bosonic model is defined to be a model that satisfies: (A) The total Hilbert space is a direct product of local Hilbert spaces of finite dimensions.
(B) Local physical operators are local bosonic operators. By definition, *local bosonic operators* are operators acting within a local Hilbert space or finite products of those operators for nearby local Hilbert spaces. Those operators are called local bosonic operators since they all commute with each other when far apart. (C) The Hamiltonian is a sum of local physical operators.
A spin-1/2 system on a lattice is an example of local bosonic models. The local Hilbert space is two dimensional which contains *j ″i* and *j #i* states. Local physical operators are ¾a
i , ¾a
i ¾b
i+x, *etc* , where ¾a, *a* = *x; y; z* are
the Pauli matrices.
A free spinless fermion system (in 2 or higher dimensions) is not a local bosonic model despite it has the same total Hilbert space as the spin-1/2 system. This is because the fermion operators c_i on different sites do

not commute and are not local bosonic operators. More importantly, the fermion hoping Hamiltonian in 2 and higher dimensions cannot be written as a sum of local bosonic operators. (Note in higher dimensions, we cannot write all the hoping terms $c^\dagger_i c_j$ as product of local bosonic operators. However, due to the Jordan-Wigner transformation, a 1D fermion hoping $c^\dagger_{i+1} c_i$ can be written as a local bosonic operators. Hence, a 1D fermion system can be a local bosonic model if we exclude c_i from our definition of local physical operators.)
The bosonic field theory without cut-off is not a local bosonic model. This is because the local Hilbert space does not have a finite dimension. A lattice gauge theory is not a local bosonic model. This is because its total Hilbert space cannot be a direct product of local Hilbert spaces.

SUSY Eichtheorie

The propagating degrees of freedom in a gauge supermultiplet are a massless gauge boson field A^a_μ and a two-component Weyl fermion gaugino λ^a. The index a here runs over the adjoint representation of the gauge group ($a = 1, \ldots, 8$ for $SU(3)_C$ color gluons and gluinos; $a = 1, 2, 3$ for $SU(2)_L$ weak isospin; $a = 1$ for $U(1)_Y$ weak hypercharge). The gauge transformations of the vector supermultiplet fields are

$$\delta_{\mathrm{gauge}} A^a_\mu = \partial_\mu \Lambda^a + g f^{abc} A^b_\mu \Lambda^c, \quad (3.55)$$

$$\delta_{\mathrm{gauge}} \lambda^a = g f^{abc} \lambda^b \Lambda^c, \quad (3.56)$$

where Λ^a is an infinitesimal gauge transformation parameter, g is the gauge coupling, and f^{abc} are the totally antisymmetric structure constants that define the gauge group. The special case of an Abelian group is obtained by just setting $f^{abc} = 0$; the corresponding gaugino is a gauge singlet in that case. The conventions are such that for QED, $A^\mu = (V, \vec{A})$ where V and $\vec{A}$ are the usual electric potential and vector potential, with electric and magnetic fields given by $\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \partial_0 \vec{A}$ and $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.
The on-shell degrees of freedom for A^a_μ and λ^a_α amount to two bosonic and two fermionic helicity states (for each a), as required by supersymmetry. However, off-shell λ^a_α consists of two complex, or four real, fermionic degrees of freedom, while A^a_μ only has three real bosonic degrees of freedom; one degree of freedom is removed by the inhomogeneous gauge transformation eq. (3.55). So, we will need one real bosonic auxiliary field, traditionally called D^a, in order for supersymmetry to be consistent off-shell. This field also transforms as an adjoint of the gauge group [i.e., like eq. (3.56) with λ^a replaced by D^a] and satisfies $(D^a)^* = D^a$. Like the chiral auxiliary fields F_i, the gauge auxiliary field D^a has dimensions of [mass]^2 and no kinetic term, so it can be eliminated on-shell using its algebraic equation of motion. The counting of degrees of freedom is summarized in Table 3.2.
Therefore, the Lagrangian density for a gauge supermultiplet ought to be

$$\mathcal{L}_{\mathrm{gauge}} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} + i \lambda^{\dagger a} \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda^a + \frac{1}{2} D^a D^a, \quad (3.57)$$

where

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \quad (3.58)$$

is the usual Yang-Mills field strength, and

$$D_\mu \lambda^a = \partial_\mu \lambda^a + g f^{abc} A^b_\mu \lambda^c \quad (3.59)$$

is the covariant derivative of the gaugino field. To check that eq. (3.57) is really supersymmetric, one must specify the supersymmetry transformations of the fields. The forms of these follow from the requirements that they should be linear in the infinitesimal parameters $\epsilon, \epsilon^\dagger$ with dimensions of [mass]$^{-1/2}$, that δA^a_μ is real, and that δD^a should be real and proportional to the field equations for the gaugino, in analogy with the role of the auxiliary field F in the chiral supermultiplet case. Thus one can guess, up to multiplicative factors, that†

$$\delta A^a_\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\epsilon^\dagger \bar{\sigma}_\mu \lambda^a + \lambda^{\dagger a} \bar{\sigma}_\mu \epsilon \right), \quad (3.60)$$

$$\delta \lambda^a_\alpha = \frac{i}{2\sqrt{2}} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \epsilon)_\alpha F^a_{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_\alpha D^a, \quad (3.61)$$

$$\delta D^a = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(-\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda^a + D_\mu \lambda^{\dagger a} \bar{\sigma}^\mu \epsilon \right). \quad (3.62)$$

The factors of $\sqrt{2}$ are chosen so that the action obtained by integrating $\mathcal{L}_{\mathrm{gauge}}$ is indeed invariant, and the phase of λ^a is chosen for future convenience in treating the MSSM.
It is now a little bit tedious, but straightforward, to also check that

$$(\delta_{\epsilon_2} \delta_{\epsilon_1} - \delta_{\epsilon_1} \delta_{\epsilon_2}) X = i(-\epsilon_1 \sigma^\mu \epsilon^\dagger_2 + \epsilon_2 \sigma^\mu \epsilon^\dagger_1) D_\mu X \quad (3.63)$$

for X equal to any of the gauge-covariant fields $F^a_{\mu\nu}$, λ^a, $\lambda^{\dagger a}$, D^a, as well as for arbitrary covariant derivatives acting on them. This ensures that the supersymmetry algebra eqs. (3.30)-(3.31) is realized on gauge-invariant combinations of fields in gauge supermultiplets, as they were on the chiral supermultiplets [compare eq. (3.16)]. This check requires the use of identities eqs. (2.18), (2.20) and (2.25). If we had not included the auxiliary field D^a, then the supersymmetry algebra eq. (3.63) would hold only after using the equations of motion for λ^a and $\lambda^{\dagger a}$. The auxiliary fields satisfies a trivial equation of motion $D^a = 0$, but this is modified if one couples the gauge supermultiplets to chiral supermultiplets, as we now do.