Ein paar Richtigstellungen der folgenden Überlegungen:

- *Oktonionen lassen sich nicht als Matrix a…b… schreiben; unitäre Matrizen gibt es nicht, da das Produkt 2er Einheitsoktonion kein Einheitsoktonion*

- *J*(c1+J*c2) gibt c1→ –c2,c2→c1 und I*(c1+J*c2) gibt c1→I*c1, c2→ –I*c2und das unterschiedliche Vorzeichen bei 1 und 2 ist typisch fermionisch!!! Quadr Tensoren c1*c2' und c2*c1' gehen dann beide mit Minus-Zeichen (bosonisch), während kubische c1*c1'*c2" und c2*c2'*c2" einmal mit Minus und einmal mit Plus (fermionisch)*
- *Transpositionen i—j sind in einem 4er-System nicht 180xy, sondern gewisse Drehspiegelungen*

- *Perms 1234, die in g1 auftreten, bezieht sich a priori nie auf die Spinkomponenten, sondern auf die gestrichenen Grössen (nur wenn alle Komponenten verschieden sind und es 4 Spinrichtungen gibt, sind sie zur Vertauschung der Spinkomponenten äquivalent)*

- *G1-Verhalten unter 2143 etc ist nicht einfach 1234→2143, sondern auch die anderen Terme in g1 reagieren. In der Gesamtheit der Terme g1=A+J*B muss es so sein, dass die Wirkung von JL:A→ –B,B→A und IL:A→I*A und B→ –I*B*

- *Da sie sich auf die gestrichenen Grössen beziehen, können sie a priori nicht Teil der Darstellung eines einzelnen Tetrons sein, sondern nut Teil von Tensorprodukten [wie A1 bis 3*T2 Teil von 4x4x4x4]. Bei einem 2er System f, f' entspricht allerdings 180xy einer Permutation (1 –2) und man kann dann sehen, was dies für die Spin-Komponenten der Einzeldarstellung bedeutet (f1→i*f2 oder f1→ –f2 bei Fermionen). Bei einem 4er System sind Transpositionen i—j 90-Drehspiegelungen.*

- *Da die Transpostionen keinen Operator X(i—j) in der Einzeltetrondarstellung haben, muss ihr Quadrat gar nicht als Einheit in der Einzeltetrondarstellung auftreten (durchaus aber* das Quadrat von 90-Drehspiegelungen). Man braucht (I+J)/w2 als neue Einheit nur, wenn man für 90-Drehspiegelungen die „Wurzel" aus (I+J)/w2 ansetzt. Wenn man zb Z4-Erweiterung mit L betrachtet, können die 4 Kopien (+-L)* (I+J)/w2 als Darstellung von 90-Drehspiegelungen herhalten.

- 360 sollte im produkt 1*2'*3''*4''' nie etwas verändern, sondern nur im (quat) Vorfaktor
- Man braucht ohnehin quat Tensorprodukte wegen QQM. In quat Tensorprodukten sind auch die Koeffs i.a. Quaternionen (obwohl wir bei komplexen Tensorprodukten wie c1*c2'-c2*c1' nur reelle Koeffs haben
- 2143 bedeutet also zunächst q1*q1'*q1''*q2'''→q1'*q1*q1''''*q2'', aber andererseits soll die Reihenfolge im Tensorprodukt bleiben, also doch besser q1*q1'*q1''*q2'''→q1*q1'*q2''*q1''', was wg Nichtkommutativität einen Unterschied macht.

S4twiddle-Erweiterung von S4 (Problem: es entsteht hier nicht virklich fermionisches Verhalten des Produktes!!!)

360—DISKUSSION:

Tensorprodukt für Flavor und Spin völlig separat, und wir betrachten hier nur die räumlichen, dh Spin-trafos, die auf Indices 1,2,3,4 wirken.

Es soll 24 verschiedene Identitäten geben entsprechend den Permutationen; zb für (1—2) die Matrix (0a00,b000,0010,0001), wirkend auf (t1,t2,t3,t4).

Betrachte Tensorprodukte mit verschiedenen Indices t1 * t2' * …, wobei die Matrix genauso auch auf (t1',t2',t3',t4') wirkt, also

t1 * t2' → a*t2*b*t1'

An dieser Stelle wird aus der 360 eine

VERTAUSCHUNGSDISKUSSION:

denn die obige Relation würde normale fermionische(aber auch bosonische) Perms

t1 * t2' → t2 * t1'

ersetzen!!!

Bei Fermionen: nur der Zustand t1*t2'–t2*t1' hat das richtige antisymm Verhalten. Kombiniert mit einer inneren SU2 sind 6 Zustände erlaubt: (12'–21')*(uu',dd',ud'+du') und (11',22',12'+21')*(ud'–du')

Zurück zur 360-Diskussion:

Fermionen:

Permutationen sind mit 180(x,y) verknüpft (I und J)

2x180=360 gibt J*J=–1

Bosonbildung aus 2 Fermions:

- ✓ Unter 360: (–1)*(–1)=+1
- ✓ Antisymmetrie durch Selektion von 12'–21'

Tetronen:

Permutationen sind mit 360 verknüpft. Man ist gezwungen, dies zu tun, weil sonst wären Tetronen unter Transpositionen (1-2) normale Fermionen.

2x360=720 bei Transpositionen die wahre Identität. Der Ansatz (0,a; b,0...) gibt als Quadrat diag(a*b,b*a,1,1). (Muss nicht –1 sein, da wir hier nicht die Z2 von Fermionen nachbilden wollen; muss auch nicht +1 sein, da wir eine Strahldarstsellung definieren wollen)

Fermionbildung aus 4 Tetrons t1*t2'*t3''*t4''':

- ✓ Identitätsverhalten: a*b*1*1 (falls b mit t2 vertauscht!!!)

  SOLL SEIN: –1 (aber auch b*a*1*1=–1 bei t2*t1'*t3''*t4'''!)

- ✓ <u>Tetronisches Permutationsverhalten ist mit Identitäts-Verhalten identisch, da es daraus konstruiert wurde</u>!!! Das heisst wir haben $t1*t2'*t3''*t4''' \rightarrow -t2*t1'*t3''*t4'''$ sowohl für 360 als auch bei Vertauschung (1-2). Also wiederum $a*b*1*1=-1$ für das Produkt. Für die Umdrehung 21'→12' brauchen wir $b*a*1*1=-1$. Ob man auch Kombis selektieren muss, wie im Fermionfall???

mögliche Lösungen für a und b:

- $a=b=i$ oder $a=-b=1$ (diese Lösungen entsprechen Paulimatrizen)
- a=b=I,J oder K oder eine andere imag Einheit. In dem Fall wären die Komponenten der Tetronen Quaternionen, also quat Tensorprodukt, also QQM!!! Die Tetronen wären Sedenionen oder aus O2(gut!!!). Aber man hätte Probleme mit der Nichtkommutativität $I*t2*I=-t2$?

Riesenproblem: $t1*t2'*t3''*t4''' \rightarrow a*b*t2*t1'*t3''*t4'''$ mit $a*b=-1$ bedeutet keineswegs, dass es ein Fermion ist, denn für Fermionen brauchen wir, dass die linke Seite gleich minus der Rechten!!! Das ist aber keineswegs der Fall, sondern wir haben hier 2 verschiedene von 24 möglichen Permutationszuständen. Na ja, vielleicht muss die linke Seite nur bei der ‚wahren' Identität (der Permutation 1234) reproduziert werden – aber dann bitte mit minus Zeichen, was im Gegensatz zu der Diskussion weiter unten steht, wo wir sogar für alle geraden Permutationen Pluszeichen gefordert haben. Es muss also gelten

$t1*t2'*t3''*t4''' \rightarrow (1234) \rightarrow -t1*t2'*t3''*t4'''$, genauer + oder – je nachdem ob es sich um das Z2-Überlagerungselement handelt. (1234) auf dem Produktzustand wirkt also wie Fermion G1 (oder A2, wenn wir nur 360 betrachten).

Lösung des Riesenproblems: man erlaubt t1*t2'*t3''*t4'''
→a*b*t2*t1'*t3''*t4''' mit verschiedenen Zuständen rechts und links, aber fordert, dass wenigstens für die G1-Symmetriefunktionen X+Y*J das –(X+Y*J) richtig entsteht (X und Y sind nur 2 von 24/48 Kombinationen der ta*tb'*tc''*td''', daher vielleicht machbar)

Da es durch eine Diagonalmatrix dargestellt werden soll, mit Determinanten –1, kann es keine gewöhnliche Strahldarstellung sein, wie unten angenommen, da deren neues Element J bei Johnson in jedem Fall Determinante +1 hat.

Wie ist es bei Bosonen aus Fermionen (f1,f2) bilden 4 Tensorprodukte fi*fj '. Die verhalten sich unter 360 gemäss (–1)*(–1)=+1, dh unter jeder Einheit gleich. Fermionen aus Tetronen

Gesucht wird eine (evtl→ projektive, evtl→quaternionische) 4dim Darstellung von S4, wo jedes Element von S4 durch eine 4x4Matrix dargestellt wird, die überall 0 ist ausser an den Stellen, wo permutiert wird und das Produkt dieser nichtnullen Einträge ist –1. (Wirklich? Eigentlich braucht nur für das Element 1234 das Produkt –1 zu sein!!!)

NOT USED:

Evtl auch +1 bei geraden Perms und –1 bei ungeraden. Letzteres wären dann die 720-Trafos des fermionischen Produktzustandes! Es würde sich wegen den beiden möglichen Vorzeichen die Darstellung A2 ergeben. (aber das ist kein Spinzustand!)

Begründung: Wenn ich eine Darstellung der Permutationsgruppe habe, die folgendermassen wirkt:

1234→ –2134 entsprechend t1*t2'*t3''*t4'''→ –t2*t1'*t3''*t4'''

1234→+2143 entsprechend t1*t2'*t3''*t4''' →+t2*t1'*t4''*t3'''

usw, so ist das ganz eindeutig die Darstellung A2!!! (Aber wir haben ±1 nur für die beiden G1-Zustände … oder G2? gerade+ungerade→ gerade–ungerade

Vieles deutet auf Strahldarstellung: man hat (1-2)**2=id. Demnach muss das Quadrat diag(a*b,b*a,1,1) die Einheitsmatrix sein, also ab=+1, ausser wir haben eine Strahldarstellung.

Strahldarstellungen der S4 sind G1(mit Quats I,J,K,½*(1±I±J±K) usw), G2 und G4. Ist dann, was wir für 360 tun, das 4-fache Produkt einer Strahldarstellung? Ja, denn wir betrachten *ja eine solche auf (t1,t2,t3,t4) und bilden dann das 4-fache Tensorprodukt. → Es kann nur bosonisches Verhalten dabei herauskommen. Aber es ist das Vorzeichen ±1 sowieso etwas Bosonisches, da es auf A2 hindeutet! Wir haben also für 360 eine 4dim Strahldarstellung G mit G⊗G⊗G⊗G=A2+…*

FOLGERUNG: für Drehungen um 360 wird die Erweiterung eine S4twiddle-Erweiterung sein!

Als 4dim Strahldarstellung geht nur Gi+Gj oder H. Die Charakteranalyse zeigt, dass nur H in frage kommt, die j=3/2-Darstellung von SU2. Über SU2 ist also 4⊗4⊗4⊗4 zu betrachten und zu gucken, ob es A2 enthält. Wir können aber ebensogut Johnson auswerten, wobei wir in H⊗H jeweils 2 Gruppen zusammenfassen können (16 0 1 0 0) und es entsteht H⊗H=A1+A2+E+2T1+2T2. Weiter mit Griffith:

H⊗H⊗H⊗H= 11A1+11A2+21E+32T1+32T2 (istgeprüft!!!)

*A2 kommt vor, aber was ist die Bedeutung der 11? Und welches sind unter den 256 Zuständen dieses Tensorproduktes die 24 Permutationszustände ti*tj'*tk''*tl''', die unter geraden Perms mit +1 und unter ungeraden mit −1 ineinander transformieren, das heisst t1*t2'*t3''*t4''' → −t2*t1'*t3''*t4''' usw.*

Konkrete Konstruktion der gesuchten 360-Darstellung:

- 1.Möglichkeit: Da sich jedes Element aus S4 als Produkt von Transpositionen schreiben lässt, brauchen wir nur für (1-2), (1-3) und (1-4) Darstellungen, und natürlich die Vorfaktoren der Strahldarstellung.
- Da sich die Spur der Matrizen gegenüber der früher definierten Darstellung A1+T2, wo an den nichtnullen Stellen überall +1 stand, nicht geändert hat, hat sich auch am Ausreduzieren zu A1+T2 nichts geändert.

Wir erlauben auch an den Diagonalstellen Phasen, also (0a00,b000,00c0,000d) für die Permutation (1-2).

Über den Quaternionen wird die Reduktion anders verlaufen.

Probleme:

1. man hat 24 Produkte der Form ta*tb'*tc''*td'''. Hoffnung: es passt nur je eines zu den 24 inneren Zuständen. Nach Close S.60 muss immer A*S und M*M kombiniert werden.

2. *Wie erzeugt man die anderen Drehungen:*

   180-Drehungen: I,J,K mal den 360-Darstellungen!!!

   Analog alles andere: ½(1±I±J±K) mal den 360-Drehungen usw ist kein Problem im Rahmen der quaternionischen 4x4Matrizen. Die Frage ist nur, ob deren Einträge wirklich Quaternionen sind, oder I',J',K' oder LI,LJ,LK o.ä.*

   Es wird dann ein Tetron wie ein Fermion mal den Erweiterungen transformieren, die wir bei 360 definiert haben, so dass Produkt von 4 Tetronen wie ein Produkt von 4 Fermionen mal dem Produkt von 4 360ern reagiert, welches +1 bei geraden und -1 bei ungeraden Permutationen ergibt.

   IST DAS WIRKLICH SO? 180 wird doch eher die Wurzel aus I,J,K sein als das Produkt!!!

Gabelungen:

- Diskreter oder kontinuierlicher Raum?   Antwort: permutation symmetry
- Komplex, Quaternionen oder Oktonionen? Antwort: hängt davon ab, in

  welchem Zahlkörper ich die Darstellung f_i→p(sig)*f_sig(i) formulieren kann
- Handelt es sich bei der SU(4) um eine aus 10 Dims hergeleitete SO(6)? mit Dubletts von SL(2,O)
- Sind Objekte a⊗a⊗c⊗d etc nur höher in der Masse oder grundsätzlich verboten durch Relationen der Erzeugungoperatoren a*a=0 etc?
- Kann man einer Permutationssymmetrie (Kern-Wolke) eine neue Statistik zuordnen? Aufpassen: normalerweise hängt Statistik mit Raumzeitsymmetrie zusammen, nicht mit innerer Symmetrie. Daher müssen wir S4-Tetraedersymmetrie auch für Raum annehmen, obwohl sie experimentell nur für innere Symmetrie gedeckt ist

Grundfrage: wenn (12±21)/2 das Dublett einer SU(2) bilden. Wie transformieren dann 1 und 2?

Bemerkung zur allg Philosophie: Unterscheide Spin-SU(2) und Isospin-SU(2).

- Bei Spin müssen auch die Tetronen irgendwie SO(3)-mässig transformieren, wenn sie räumliche Objekte sein sollen. Hier lösen wir das Problem mit diskreter Raumzeitsymmetrie oder mit nicht-assoziativen Zahlen. (neuerdings auch mit dem Versuch einer anderen Statistik, die auf einem anderen SO(3) Verhalten beruht – in Zusammenhang mit Permsymmetrie)

- Bei Isospin müssen nur die zusammengesetzten (12±21)/2 das Dublett einer SU(2) bilden. Wie sich die Komponenten 1 und 2 transformieren, ist a priori nicht festgelegt und wird aus der Forderung bestimmt, dass (12±21)/2 ein SU(2) Dublett ist. NB: + steht für Isospingemittelt und – steht für den Delta-Term → es könnte auch (12,21) das Dublett sein. (es kann auch sein, dass die Komponenten nur Erz-operatoren sind und daher kein definiertes Symmetrieverhalten haben)

- Trotzdem gibt es eine grosse Ähnlichkeit. Wir wollen von 16 nur 4 Zustände (a⊗b±b⊗a)*(α⊗β±β⊗α), wobei der erste Faktor für Isospin steht, der zweite für Spin. {beim Deuteron oder Heliumatom, wo die Konstituenten Fermionen sind, hat man von 16 Zuständen die folgenden 6: [a⊗a;b⊗b;(a⊗b+b⊗a)]*(α⊗β-β⊗α) und (a⊗b-b⊗a)*[α⊗α;β⊗ β;α⊗β+β⊗α]}

- Da wir für Isospin/innere Symmetrien die Keime der Vektorbosonen aus einem Teil von SU(4) hergeleitet haben, brauchen wir die Dubletteigenschaft von 12±21= α⊗β±β⊗α vielleicht gerade nur für den Spinanteil !

- Aber dort ist die Lage bei 4 Konstituenten völlig anders, da nicht Perms α⊗β⊗γ⊗δ den Spin ½ ergeben (das wären viel zu viele Spin-Zustände), sondern wir brauchen nur zwei: α⊗α⊗α⊗α und β⊗β⊗β⊗β mit α=⅛ und β=-⅛

Problem der ‚Keime': bei (u1,u2)→(u2,u1) kommt auch keiner auf die Idee, diese Z2 für eine 180 Drehung und Teil einer grösseren kontinuierlichen inneren Symmetrie zu halten, sondern 12+21 ist Teil des symm und 12-21 des antisymm Tensorproduktes und sind nie Teil derselben Darstellung.

SU(4)

- Die Perms in 4⊗4⊗4⊗4 dürfen nicht versch Spins also 0⊗0⊗0⊗1/2 enthalten, da Tensorprodukte (a'b'c'd')⊗(abcd)⊗(abcd)⊗(abcd) mit verschiedenen Feldern entstehen
- Kontinuierliche SU(4) und diskrete Micro-Geometrie sind nicht kompatibel, so dass diskrete Raumsymmetrie (zur Erklärung von Spin1/2) eine ZUSATZforderung ist.
- Entweder Form der Lagrange-WW oder Kommutatoren machen abbd=0 oder es ist wie bei QCD ein kompl dyn Effekt

- Braucht man ausser Hyperflavor auch Hypercolor? Nein, da wir SM-Ladungen durch Stellung in der Permutation beschreiben und superstarke WW durch SU(4)
- Man sieht der 24 in 4⊗4⊗4⊗4 die SM-Ladungen nicht an. Warum sollte also die 15 in 4⊗4bar nicht auch die SM-VBs enthalten

Wie genau hängen die SU4-Trafos mit den Keimen Z2xZ4 von SU2xSU3xU1 zusammen?

Zum Beispiel in S2, wo g±u die **<u>2</u>**(Isospin) aufspannt und t1 und t2 die **<u>2</u>**(Hyper) mit g=t1⊗t2 und u=t2⊗t1, wird durch Jleiter:t1←→t2 das I3(g±u)= ±(g±u) induziert, während zb J3 lässt g±u invariant. Wie kriegt man Ileiter:g+u←→g-u?

Da **<u>2</u>**(Isospin) Teil des Tensorproduktes **<u>2</u>**(Hyper)⊗**<u>2</u>**(Hyper)=**<u>3</u>**(Hyper)+**<u>1</u>**(Hyper) ist, können g±u als Teil von **<u>3</u>**(Hyper)+**<u>1</u>**(Hyper) gar nicht als **<u>2</u>**(Isospin) transformieren, da völlig anderes Trafoverhalten. Zb g-u ist Hypersinglet, das sich trivial transformiert.

> Es kann aber auch nicht so sein, wie im Quarkmodell (SU2colorxSU2flavor), wo aus ud±du und 12-21 Flavortriplet/singlet und Colorsinglet wird gemäss u1d2-u2d1±(d1u2-d2u1), weil unser Ergebnis soll ja ein IsoDUBLET sein. Man könnte versuchen, t1 wie gehabt und t2 zusätzlich Isodublet, also (t21,t22) Eigenschaft. Ergebnis wären 4 Zustände t1*t21±t2*... aber nicht mit Permsymmetrie zu vereinbaren und die Isodubleteigenschaft des Produktzustandes wäre bzgl (t21,t22) und nicht wie wir es haben wollen, bzgl ±.
> Wenn 12±21=g±u ein Isodublett bilden soll, muss es dies völlig unabhängig von der SU(4) tun; und dasselbe (unbekannte) Argument kann auch Raum-spin-dublett geben.

SP(4)

> Es muss Sp(4) statt SU(4) sein, aus folgendem Grund: die SM-Ladungen müssen sekundäres Ergebnis der Stellung der f1, f2, f3, f4 zueinander in der Permutation sein. (Wie in unserem Matrixbeispiel: diag(1,1) und diag(1,-1) bestimmen die SU(2)-Ladung, die sich aus der S2-Permutation ergibt oder in der alten Arbeit, wo ich mit nichtdiagonalen Ladungsmatrizen arbeite.) Darauf deutet auch hin, dass U(1)xSU(2)xSU(3) dem A1/2+E+T1/2 von Td entspricht!

Man benötigt t1⊗t2→t1⊗t2 aber t2⊗t1→-t2⊗t1 und das ist irgendwie eine nichtkommutative Eigenschaft, nämlich t1→a*t1 und t2→b*t2 (oder allgemeiner SU2-Trafo) erfordert dann a*b=-b*a (also SU2H), dh die **<u>2</u>**(Hyper) ist nicht Darstellung von SU2C, sondern von SU2H=Sp(2)!!!!!!!! (Jedoch wird man sogar auf ***nichtassoziativ*** geführt, und das deutet auf SL(2,O) hin)

Nb:Sp(2)/(Sp(1)×Sp(1)) ≡ SO(5)/(SU(2)×SU(2)) ≡ SO(5)/SO(4) = S4.

Betrachte Sp(1)×Sp(1) als Untergruppe von Sp(2). Die Fundamentaldarstellung 2p von Sp(2), die von t1 und t2 aufgespannt wird, ist komplex gesehen 4dimensional und zerfällt bzgl der Untergruppe Sp(1)×Sp(1)= SU(2)×SU(2) in (2,1)+(1,2). Also ist 2p⊗2p=[(2,1)+(1,2)]⊗[(2,1)+(1,2)]=(3,1)+(1,1)+2x(2,2)+(1,3)+(1,1). Dabei liegt t1⊗t1 in (3,1)+(1,1) und t2⊗t2 in (1,3)+(1,1) und t1⊗t2 in der einen (2,2) und t2⊗t1 in der anderen (2,2), sind also Dublets im doppelten Sinne, aber nach wie vor keine Dublets bzgl Trafos von t1⊗t2 und t2⊗t1 ineinander. t1⊗t2+t2⊗t1 und t1⊗t2-t2⊗t1 gehören zum symm resp antisymm Teil des Tensorproduktes 2p⊗2p und sind damit automatisch immer in 2 verschiedenen Darstellungen!

Die Liealgebra kann man durch 2x2-Quaternionenmatrix (a,b;-bbar,c) beschreiben, wobei a und c keinen Realteil haben und mit ihren I,J,K=Paulimats die Liealgebren der beiden Sp(1)=SU(2) Faktoren beschreiben und der b-Anteil die restlichen 4 Generatoren [dim sp(2)=10=n*(2*n+1)]

Damit sind die 4 Freiheitsgrade von b auch für t1⊗t2 in (2,2) verantwortlich und t1⊗t1 in (3,1) und t2⊗t2 in (1,3); denn die Liealgebra entsteht aus dem symmetrischen Teil des Produktes 2p⊗2p der Funddarstellungen.

Konstituentenebene

- bildliche Vorstellung: Die Fermionen sind extended über einem Tetraeder (oder Würfel) und bestehen aus einem **Kerngerüst** und einer **Orbitalwolke**. 24 Zustände ergeben sich durch 24 Permutationen (diskrete innere S4) der Wolke über dem Kerngerüst. Daneben gibt es die kontinuierlichen räumlichen Drehungen von Wolke **UND** Kerngerüst, unter denen sich das Gesamtobjekt wie ein (2- bzw 4-komponentiger) Spinor verhalten muss.

Bemerkung zu Antiteilchen: mit Spin und Antiteilchen hat man 96 Fermionzustände, die man nichtrelativistisch in S4xZ2(spin)XZ2(anti) anordnen kann, denn nichtrelativistisch ist der Spin eine unabhängige Z2 und Antiteilchen entsprechen komplexer Konjugierung, also ebenfalls eine Art Z2. Dies ist isomorph zu Ohtwiddle mit Oh=OxP (wobei ich P gern mit L←→Rbar in Verbindung bringe, denn wenn C*P eine Invarianz ist, sind P und C verknüpft, aber auch P und Spindrehung sind verknüpft). Wegen der Z2-Faktoren hat man dann Darstellungen A1g, A1u mit Summen und Differenzen für die Symmetriefunktionen. Relativistisch können wir einfach bei den 4 Diracfeldern ψL, ψR, ψLbar, ψRbar bleiben, von denen es mit abcd indiziert jeweils 24 Stück gibt. Auf der Ebene der compounds ist dies ausreichend. Wenn man aber nach Konstituenten fragt und den Fermionen eine geometrische Ausdehnung möglicherweise mit Würfelstruktur zuspricht, ist dies nicht die ganze Wahrheit, da zum einen die Würfel keine relativistisch invarianten Objekte sind und zum anderen Spin und Antiteilcheneigenschaft dann womöglich zusammengesetzt sind.

Zwei Grundfragen:

1. gibt es eine grössere, kontinuierlich Symmetrie, die die S4 enthält und daher auch die 24 Fermionzustände? - Allerdings macht es keinen Sinn, alle 24 diskreten S4-Zustände in einem Multiplet einer grösseren Gruppe anzuordnen (und geht auch technisch nicht), da wir sowieso keine SU(24) (höchstens für Teilbereiche wie Isospin) brauchen, sondern über mehrere Multiplets verteilt, die sich wie bei SU(4) gesehen als 4faches Produkt der Fundamentaldarstellung ergeben.

Die Wirkung der S4 auf ein einzelnes Tetron kann als A1+T2 aufgefasst werden: Nehme ein Element σ:abcd→ABCD der inneren S4. Wenn wir fia→Uab*fjb zugrundelegen (unterer Index bleibt, Vij=1, da nicht räumlich), muss f1a→f1A usw sein, zb abcd=2134 und σ=(2←→3) gibt ABCD=2314, dh U muss genau das machen, was σ macht!!!:

1 0 0 0

0 0 1 0

0 1 0 0

0 0 0 1

für festes i sind die fia eine 4dim-Darstellung von S4, die man als A1+T2 ausreduzieren kann (dessen Quadrat (A1+T2) ⊗ (A1+T2)=2 A1+E+T1+3 T2 wurde bewiesen zu sein die 16dim Darstellung der räumlichen Drehungen wo kern und Wolke gleichzeitig transoformiert werden). (analog auch als Darstellung der Operatoren Fa unten!). In der echten, grösseren Symmetrie werden die Tetrons A1+T2 vermutlich eine irreduzible Darstellung bilden (z.B. bei SU(4) die Fundamentaldarstellung). Das ist wie bei S3 und flavor-SU(3) für Quarks: als S3: A1+E (siehe Papier) für die Quarkkonstituenten. In der vollen SU(3) gibt es so eine Zerlegung des fundamentalen Quarktripletts dann nicht mehr. Es könnte aber auch Hinweis auf einen Raumzeit-Zusammenhang sein, wenn man statt Td eine grössere relativistische Symmetriegruppe hätte.

2. Wie müssen sich die Tetronen räumlich transformieren, damit die 24 S4-Gesamtzustände Fermionen sind? Wenn man annimmt, dass es statt 4 räumlich gleichtransformierende Objekte aus 3 Bosontetron + 1 Fermiontetron bestehen, hat man dieses Problem nicht und braucht hier nicht weiterlesen [in dem Fall ist mir nicht ganz klar, inwieweit die Linearkombs noch tragen; man muss die Linkombs und damit auch das Seesawargument der Massen auf jeden Fall aufgeben, wenn man Tetronentypen mit unterschiedlichen (Standardmodell)ladungen einführt – hier das PQRS von oben diskutieren – da die Produkte PQRS dann unterschiedliche SM-Ladungen haben.] Sonst hat man das Problem, dass man aus 4 Komponenten kein Fermion machen kann, und dass dies sogar auch gilt, wenn man nur eine diskrete räumliche Symmetrie (des Würfels oder Tetraeders), da auch dort nur halb- und ganzzahlige Darstellungen gibt (dh echte Darstellungen A1,A2,E,T1,T2 und komplex projektive Darstellungen G1,G2 und H, dh Darstellungen der Überleagerungsgruppe) und diese sich nach analogen Regeln wie bei SO(3)-Drehungen addieren lassen. Allerdings scheint mir, dass bei diskreten Drehungen die Bedeutung der Überlagerungsgruppe nicht so gross ist, die eine Z2-Erweiterung der S4 ist und man genauso gut nach quaternionisch projektiven Darstellungen der S4 suchen kann (Darstellungen einer Z2xZ2- oder Z4-Erweiterung von S4); allerdings muss man dann von der komplexen zur QQM übergehen. bei diskreten Gruppen zeichnet sich die Überlagerungsgruppe nur dadurch aus, dass sie alle projektiven Darstellungen der ursprünglichen Gruppe enthält. (Sie kann nicht einfach nur das

direkte Produkt mit einer Z2 sein, da dann nicht so komplizierte Darstellungen wie G1,G2,H entstünden) Projektive Darstellungen kommen in der Quantenmechanik in Frage, da Phasen bei der Bildung des Betragsquadartes der Wellenfuntion wegfallen. In der QQM hat man quat Phasen. (→Definition einer quat proj Darst in Analogie zu Noeske). Unten werden wir sehen, dass wir, wenn wir 4 diskret und gleichartig transformierende Objekte (Tetronen) zu Spin ½ koppeln wollen, quat proj Darst brauchen. Die Existenz von Tetronen legt also QQM nahe – oder sogar octonionisch, da Noeske meinte, quaternionisch-proj Darstellungen gibt es auch nur als Z2.

Zunächst scheint es, dass für Spin-SU(2) diskrete Drehungen keinen Sinn, da wir den Raum kontinuierlich drehen können. Sicherlich kann man untersuchen, wie sich die Zustände unter der räumlichen S4=Td⊂SO(3) verhalten, zb unter K2=2143, entsteht aus f1a*f2b*f3c*f4d ein f2b*f1a*f4d*f3c (Wirkung auf beide Indices gleichzeitig, während die innere S4 nur auf den oberen Index wirkt), was bei ***Vertauschbarkeit*** der fia Rotationsinvarianz des Produktzustandes bedeutet, also Spin 0. Dies kann also nicht die volle Wahrheit sein, da wir Spin ½ für den Gesamtzustand brauchen. Bei ***Antivertauschbarkeit*** kommt bei ungeraden Permutationen hier ein -1 heraus.

Wir brauchen einen zwei-komponentigen Spinor (f_(1a2b3c4d),g_(1a2b3c4d)), der sich gemäss G1 (räumlicher S4-twiddle) transformiert, wo bei einer Rotation die Indices ungeändert bleiben (ändern sich nur bei inneren S4) und nur f und g gemäss SU(2) ineinander transformieren. Wenn man bei der Wirkung von K2 Phasen zulässt f11→p12*f22 usw, könnte auch das Gesamtprodukt eine Phase erhalten, und wäre damit kein reiner Skalar mehr. Genauer: f1a*f2b*f3c*f4d→p12*f2b*p21*f1a*p34*f4d*p43*f3c, oder bei 120Grad (1342): f1a*f2b*f3c*f4d→f1a*p23*f3c*p34*f4d*p42*f2b oder bei einer beliebigen Permutation abcd: p1a*p2b*p3c*p4d. p_i^a könnten quaternionische Phasen sein, die auf Quaternionen f_i^a wirken. [f_i^a transformieren zwar nicht einzeln wie ein gewöhnlicher Spinor, wohl aber ihr Produkt. Problem: dann kommutieren die fia nicht mehr, dh man bekommt das ursprüngliche Fermion nicht zurück. Allerdings ist f1a*f3c*f4d*f2b auch kein anderer Flavor, sondern das wäre f1A*f2B*f3C*f4D, und wir haben es hier mit 24 neuen Freiheitsgraden zu tun! Wir brauchen aber für räumliche Rotationen nicht nur Phasen, sondern auch die Funktion f1a*f2b*f3c*f4d muss sich als Spinor ändern, dh teilweise eine andere Spinrichtung. Die andere Spinorkomponente ist zb f2b*f1a*f4d*f3c gleichzeitige Vertauschung von beiden Indizes Kern/Wolke Idee] Wenn man für die Identität (1234= 360Grad) etwa annimmt f1a→i*f1a, f2a→i*I*f2a, f3a→i*J*f3a, f4a→i*K*f4a, also p11=i, p22=i*I, p33=i*J, p44=i*K mit p11*p22*p33*p44=-1. Es gibt noch 12 weitere Phasen p12,p13,p14,p23, ... in der 4x4 Matrix pia. Wir haben via Td folgende Beziehungen: 3 Drehungen um 180Grad: p12*p21*p34*p43=K, p13*p24*p31*p42=J, p14*p23*p32*p41=I. Dass das Quadrat einer 180grad Drehung eine 360er ist, ist dann automatisch erfüllt. 8 Drehungen um 120/240: zb 1342 p11*p23*p34*p42=(1/2)*(1-i-j-k) für die anderen siehe Tony-htm-Seiten. 6 Spiegelungen 1-2,1-3,1-4,2-3,2-4,3-4 (in Oh gibt es statt der Spiegelungen: 6 Drehungen um 90Grad)

Natürlich bleibt auch noch die Frage, wie sich die einzelnen fia unter *kontinuierlichen* räumlichen Drehungen verhalten. In dem obigen Beispiel ist f1a→(K2)→f2b usw, dh ein skalares Verhalten des Produktes (ausser es kommutiert nicht!), aber ein nicht-skalares Verhalten der einzelnen fia. Kein Wunder, da es sich nicht um eine Drehung um ihr Zentrum, sondern des Gesamtzustandes handelt. Tatsächlich hat man hier eine 16-dim Darstellung der S4 (als Teilmenge der räumlichen SO(3) analog der obigen Darstellung Uab, nur hier auf beide Indizes) auf den fia, die man ausreduzieren kann. Z.B. die vier fii bilden einen Teilraum A1+T2. *Ausreduzieren der 16-dim Darstellung nötig!* **Wir haben auf Papier bewiesen: Diese ist 2A1+E+T1+3T2 und das entspricht genau dem Quadrat (A1+T2) ⊗ (A1+T2)!**

Räumliche Symmetrie wird durch gleichzeitige Trafo unterer und oberer Indizes f_i^a beschrieben, da man andernfalls bei einem anderen Fermionflavor landen würde.

ZB 120Grad=1342: f1a*f2b*f3c*f4d→f1a*f3c*f4d*f2b

Da also räumliche Symmetrie durch gleichzeitige Trafo von obern und untern Indizes beschrieben wird, kommt man für die innere Symmetrie mit den 4 Feldern f_1^{1,2,3,4} aus und für die räumliche mit f11,f22,f33,f44.

(Besser wären 4 kanonische Linkombs, aber welche?

f11mod(+f22+f33+f44); f12mod(+f23+f34+f41); f13 mod(+f24+f31+f42); f14 mod(+f21+f32+f43)

für die innere Symmetrie;

f11 mod(+f12+f13+f14); f21 mod(+f22+f23+f24); f31 mod(+f32+f33+f34);f41 mod(+f42+f43+f44)

für die räumliche Symmetrie)

Das heisst: SU(4) eher als Sp(4). Bei Sp(4) wären räumliche und innere Symmetrie verschmolzen. Vielleicht ist die von Adler erwähnte SO(4) in Zusammenhang mit quaternionischen Phasen genau das, was ich brauche. Oder SO(1,3)?

Es kann sein, dass die fia nur unter einer diskreten Teilgruppe der räumlichen SO3 transformieren, weil man die Tetronen ja nicht einzeln drehen kann. Dann muss man quat/projektive Darstellungen und/oder Z4-Erweiterungen von beispielsweise S4(räumlich) bzw Oh untersuchen, zb √i, √j, √k für die π-Drehungen k1,k2,k3. Allerdings ist bekannt (Noeske), dass es da auch nur Darstellungen mit Spin ½ und nicht mit Spin ¼ gibt (diese Aussage gilt wahrscheinlich auch für Oh). Einwand: da man den Raum kontinuierlich drehen kann, muss man auch sagen können, wie sich die f_i^a darunter verhalten. **(Eine gute Alternative ist die Annahme, es gibt 24 Versionen der 2pi-Drehung, siehe woanders)**

Das ist aber etwas anderes, als wenn wir sagen, wie sich der Spinor, der ja nur eine diskrete Oh-Symmetrie hat, unter Drehungen verhält! Der Spinor sieht aus grossen Entfernungen wie ein rotationssymmetrischer Punkt aus. Bei kleinen Abständen brauchen wir sein Spin1/2verhalten nur für die diskreten Oh-Trafos. Möglicher Einwand gegen die gesamte diskrete Symmetrie: bei Kristallen spiegelt sich die diskrete Symmetrie der Moleküle auf makroskopischer Ebene, aber nur, weil sich Würfel an Würfel setzt. Wir haben dagegen völlig bewegliche kleine Einzelwürfel. Wenn wir eine kontinuierliche Drehung des Raumes machen, können wir eine Abweichung des Miniwürfels von der Rotationssymmetrie wahrnehmen, wenn wir nahe genug dran sind. Bei grösseren Entfernungen scheint er wie ein Punkt mit SU(2)spin-Symmetrie.[Analog wäre ein Fermion als

Objekt mit 2 Kanten, das aus der Entfernung wie ein Punkt aussieht. Kanten entlang der x-Achse: invariant bei Rotation um x-Achse aber bei Symmetrietrafo x-->-x(180Grad um y oder z Achse) mit i transformiert, so dass bei 360 Grad -1 kommt. Problem: kontinuierliche Rotation um x-Achse, bei der es sich wie ein Skalar verhalten würde.]

Kann man 2-komponentige Spin-Natur aus dem inneren S4-Anteil bekommen? Bei einer (kont) Drehung kriegt das Fermion dann von der inneren S4 mitgeteilt, ob es mit +SO3 oder mit –SO3 reagieren soll. Das ginge nur, wenn die innere S4 bei räumlichen Drehungen mittransformiert würde. [Wilcek: die SO4-Cliffordalgebra liefert gemäss T(i←→j)=γi+γj eine (spinor)Darstellung der S4, aber Wilzek ist falsch laut Read] Normalerweise würde man denken, dass man die Frage von Spin ½ aus 4 Objekten P*Q*R*S unabhängig von der inneren S4 betrachten kann, also völlig unabhängig von den Indizes. Idee, dass bei einer räumlichen Drehung um α das Tetron nur mit einer Drehung um [α] reagiert, dh Drehung modulo der nächstliegenden Tetraederecke (einfacher wäre: Würfelecke). Warum greift so ein Argument nicht für die realen Baryonen? Weil sie aus Spin ½ Objekten bestehen. Wir wollen die Spin ½ Objekte erst aufbauen. Betrachte S2 und versuche zu erklären, warum nur 12±21 auftreten und diese Spin ½ haben: Eine räumliche Drehung um α ist hier eine Drehung modulo 180Grad, also z.B. [220]=40 und [360]=180 und kann darum ungleich dem Ausgangszustand sein. Dies geht natürlich nur, wenn die beiden Konstituenten verschieden sind, weil sonst auch die Drehung um 180 die Identität wäre. Ich habe auf Papier bewiesen, dass so ein Ansatz tatsächlich zu Antivertauschungsrelationen führen kann, als zu Spin ½

Bei Dreieck statt S2 hat man SO(2)/S3, was zu einer Dreizähligkeit führt. *(Warum sind dann die Quarks in Baryonen nicht solche 3-zähligen Objekte?)* Bei Tetraeder statt S2 betrachten wir SO(3)/S4 oder SU(2)/~S4. Ist S4 ein Normalteiler von SO(3)? Wirkt SO(3)/Oh auf R3/Würfel? Eine 360 Drehung führt dann statt auf die Identität auf eine der Nachbarecken des Tetraeders/Würfels. Eine erneute 360 Drehung um dieselbe Achse sollte aber für den Gesamtzsutand die Identität geben???

- Alternative zu Kerngerüst und Wolke sind nichtkommutative Operatoren Fa*Fb*Fc*Fd, zB 2x2-Matrizen. Hier erzeugt die innere S4 wieder durch Permutationen der abcd die Zustände. Man kann sogar Fa**2=0 erreichen, also mein Perm-Auswahlprinzip. Das räumliche Trafoverhalten (Spin ½) kann man versuchen, mit Quaternionen zu bekommen? Oder dadurch, dass die Operatoren einen zweiten (räumlichen) Index bekommen.

z.B. für Isospin S2: F1*F2 und F2*F1 sind verschieden und F1*F1=0=F2*F2 wg erweitertem Pauliprinzip.
Schreibe (für) F1=matrix(0, f1;0,0) und F2=matrix(0,0;f2,0), so dass Fp=F1*F2+F2*F1=f1*f2*diag(1,1) und Fm=F1*F2-F2*F1=f1*f2*diag(1,-1). Diese beiden Objekte, oder mit anderen Worten die Matrizen diag(1,1) und diag(1,-1) sollen wie die Komponenten eines Isospin-SU2-Vektors transformieren, also diag(1,1)→diag(a+c,a-c) und diag(1,-1)→diag(-cs+as,-cs-as). Okay, why not! (gibt eine kontinuierliche SU2 aus einer S2 mit Fp=g+u, Fm=g-u; das wäre ein Modell für den Isospin mit den diag-Matrizen als seinen Casimir-Ladungen-Cartan-maximal-vertauschbar. Aber: was bedeutet das für die Trafoeigenschaften der Einzelfaktoren f1, f2?). Allerdings nicht ohne weiteres auf S4 zu übertragen, da wir dort Diagonalmatrizen vom Format 24x24 auf der rechten Seite bräuchten. Welche Liegruppe hat soviele Ladungen? Müssen nicht alles Ladungen sein. Oder kommt man auch mit kleineren Matrizen aus? Nein, denn man will 24 kommutative Freiheitsgrade (die normalen Teilchenfelder) und dafür braucht man 24 Diagonalelemente. Man muss Ladungen aus verschiedenen Darstellungen dieser Liegruppe nehmen.
Bemerkung: ein exp(th/4)* exp(th/4)* exp(th/4)* exp(th/4) kriegt man mit Operatortrafoverhalten Fi→UFiU+ nicht hin.